

Algebra und Zahlentheorie

Blatt 1

Abgabe: 31.10.2022, 14 Uhr

Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (4 Punkte).

Sei G eine Gruppe mit Elementen $\{a_i\}_{1 \leq i \leq 8}$ ($a_i \neq a_j$ falls $i \neq j$) derart, dass

\cdot	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_1	a_1							
a_2					a_8	a_7	a_5	a_6
a_3			a_1					
a_4								
a_5		a_7			a_1			
a_6		a_8				a_1		
a_7		a_6					a_1	
a_8		a_5						

- Ergänze die obige Tabelle mit den Zusatzinformationen, dass a_2 und a_4 Ordnung echt größer 2 haben. Ist die Gruppe G abelsch?
- Bildet die Menge $\{a_j\}_{j \leq 4}$ eine Untergruppe von G ? Ist es ein Normalteiler?

Aufgabe 2 (6 Punkte). Betrachte folgende Verknüpfung auf dem kartesischen Produkt $G = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$:

$$(\lambda, a) \star (\mu, b) = (\lambda \cdot \mu, a + \lambda \cdot b).$$

- Zeige, dass \star ein Gruppengesetz auf G definiert. Ist die Gruppe (G, \star) abelsch?
- Ist die Teilmenge $U = \{(1, a)\}_{a \in \mathbb{R}}$ eine Untergruppe von G ? Hat U endlichen Index in G ?
- Ist $\{(\lambda, 0)\}_{\lambda \neq 0}$ ein Normalteiler von G ?

Aufgabe 3 (4 Punkte).

- Sei $F : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus und $K \leq H$ eine Untergruppe. Zeige, dass die Menge $F^{-1}(K) = \{g \in G \mid F(g) \in K\}$ eine Untergruppe von G bildet
- Wenn $K \trianglelefteq H$, ist $F^{-1}(K)$ ein Normalteiler von G ? Gilt die Rückrichtung?
- Sei nun X eine n -elementige Menge. Zeige, dass jede Bijektion $h : \{1, \dots, n\} \rightarrow X$ einen Gruppenisomorphismus

$$F_h : \text{Sym}(X) \rightarrow S_n$$

$$f \mapsto h^{-1} \circ f \circ h$$

definiert.

(Bitte wenden!)

Aufgabe 4 (6 Punkte).

- a) Zeige per Induktion über den Abstand $|i - j|$, dass jede Transposition $(i j)$ sich als ein Produkt von Transpositionen der Form $(k k + 1)$ schreiben lässt.
- b) Zeige, dass jede Transposition $(k k + 1)$ in der von der Menge $\{(1 2), (1 2 \cdots n)\}$ erzeugten Untergruppe von S_n liegt.
- c) SchlieÙe daraus, dass die Menge $\{(1 2), (1 2 \cdots n)\}$ die Gruppe S_n erzeugt.

DIE ÜBUNGSBLÄTTER KÖNNEN ZU ZWEIT EINGEREICHT WERDEN. ABGABE DER ÜBUNGSBLÄTTER
IM FACH IM KELLER DES MATHEMATISCHEN INSTITUTS.